

株価変動に見るフラクタル性の研究

The Research of the Stock Prices Changing from the Fractal Theory

岩田 英朗・芦田 昌也・竹内 昭浩

Iwata, Hideaki & Ashida, Masaya & Takeuchi, Akihiro

ABSTRACT

In this paper, we investigate the fractal structure of a time-series in stock prices. First, we clear up the fractal structure in the changes of TOPIX and DJIA between 1997 and 2007, and estimate each fractal dimension. After that, we investigate the source of the fractal properties in TOPIX and DJIA by using a stochastic differential equation.

If a time-series change of stock prices can be expressed by a stochastic differential equation, the source of the fractal properties will be limited to the Brownian motion included in it. We therefore researched the change of fractal dimensions when the coefficients of Standard Deviation which determine a probability density function at Brownian motion are changed by the computer simulations. As a result, we discovered that the fractal dimension at time-series change, calculated with a stochastic differential equation, is determined by the coefficients of trends and volatilities. Because the fractal dimensions at TOPIX and DJIA are not inconsistent with the results of the computer simulations, we drew the conclusion that their time-series change can be expressed by a stochastic differential equation with 10 years.

We consider this fact to be a limit of the linear technique when we forecast the price of stocks, so the problem that now confronts us is the development of new non-linear forecasting techniques.

1. はじめに

公開市場における株券の売買価格は、当該企業の社会的・経済的価値を反映すると考えられている。そこで、複数の上場企業の株価より算出可能な指標を設定し、その値をもって市場が属する国や地域さらには世界全体の経済活動状況をベンチマークしようとの試みが、世界各地で行われている。

社会における様々な経済環境の変化を内包する指標のこれまでの時系列変動から、今後の変動を予測可能な状況こそが理想であるが、時間経過に対する同指標の変動は一見しただけでは規則性は認められず、ランダムに見える。しかしMandelbrotは、株価変動を示すグラフ（チャート）にフラクタル性（自己相似性）が存在する事実を発見した。^[1]この事実は、統計的分析によって株価変動に一定の規則性を見出すと同時に、今後の株価変動を予測可能とする技術の開発可能性を示唆している。その一方で、変動チャートが内包するフラクタル性を解明することにより、株価の未来予測に対する線形的アプローチの限界を明らかにする可能性も認められる。

そこで本研究では、株価指標の変動に認められるフラクタル性を解明することにより、線形手法を用いた株価予測の可能性とその限界について考察する。

2. フラクタル構造とフラクタル次元

フラクタル（fractal）という単語は1975年にB. B. Mandelbrotによって考案されたが、特徴的な長さをもたない図形や構造・現象などの総称として用いられる。フラクタル構造を有する図形は自己相似形を成しており、その相似性次元をフラクタル次元と呼ぶ。^{[2] [3]}

フラクタル次元の推定方法は、大きく5つに分類される。

- (1) 粗視化の度合いを変化させることにより推定する方法
- (2) 測度の関係より推定する方法
- (3) 相関関数より推定する方法

(4) 分布関数より推定する方法

(5) スペクトルより推定する方法

中でも特に (1) の粗視化の度合いを変化させる推定方法は Box-counting Method と呼ばれ、フラクタル次元の推定に広く用いられている。

今、集合を構成する要素が特定空間に分布しており、その状況がフラクタル構造を有しているとする。空間内に大きさ s の Box を用意し、要素全てを覆う目的で重ならないように Box を並べていく。必要とする Box 数を $N(s)$ で表す時、Box-counting Method によるフラクタル次元 D_{BOX} の推定法は式 1 となる。

$$D_{box} = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log N(s)}{\log s} \quad (\text{式 1})$$

ただし、Box-counting Method によるフラクタル次元の推定を行う際は、幾つかの条件を満たさなければならない。特に、集合 F の要素が分布する空間は、空間を規定する軸の単位やスケールがその全てにおいて等しくなければならない。

時間変化に応じて値が変動する経済指標の場合、要素が分布する空間は時間と指標という異なる 2 以上の軸から構成されるため、フラクタル次元の推定に Box-counting Method を用いるのは適切ではない。^[4]そこで Burlaga と Klein は、時系列データを要素とする集合におけるフラクタル次元推定法の一つとして BK 法^{[5][6]}を考案した。

時間 t に依存する時系列データ n 個により構成される集合 $F = \{x(t) | 1 \leq t \leq n\}$ が存在する場合、BK 法では最初に、時間 t に沿って順番かつ重複しないように各要素を個単位のグループに区分する。これにより $[n/k]$ 組のグループが形成されるが、 i 番目のグループを $\tilde{x}_i(k)$ と表す時、 $\tilde{x}_i(k)$ は $x((i-1)k+1)$ から $x(i \cdot k)$ までの k 個の要素で構成される。ただし、 $[\]$ はガウス記号とする。

グループ化の単位数 k を一種の粗視化の度合いと考え、 k の値を変化させた時の平均変動量変化に着目し、フラクタル構造の有無やフラクタル次元を推定しようという発想である。BK 法では、時系列平均変動 $L_{BK}(k)$ を式 2 により求め

る。ただし、 $\overline{x_1}$ は i 番目のグループ $\tilde{x}_i(k)$ の平均を意味する。

$$L_{BK}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{\lceil n/k \rceil} |\overline{x_{i+1}}(k) - \overline{x_i}(k)| \quad (\text{式 2})$$

k の値を様々に変化させた時、式 3 および式 4 の関係を満たすならば、集合 F はフラクタル構造を持つと判断し、そのフラクタル次元を D_{BK} と推定する。

$$k \propto L_{BK}(k)^{-D_{BK}} \quad (\text{式 3})$$

$$D_{BK} = -\frac{\log L_{BK}(k)}{\log k} \quad (\text{式 4})$$

3. 株価チャートとフラクタル次元

まず始めに、時間 t に対する株価変動を示すチャート（変動チャート）にフラクタル構造が認められるか否かを検証する。そこで、東京証券取引所第一部上場株式銘柄全てを対象とした指標である TOPIX（Tokyo Stock Price Index：東証株価指数）と、NY 証券取引所に上場する米国を代表する優良銘柄 30 から算出された指標である DJIA（Dow Jones Industrial Average：ダウ平均株価）を例に、BK 法を用いたフラクタル次元の推定を行った。

株価は、外的要因と内的要因によって変動すると考えられている。外的要因には、景気や産業動向・海外市場の動向や原材料価格・為替や金利といったマクロ的に作用するものから個別の企業業績まで様々な要素が考えられる。一方、信用残や裁定買い残の状況や機関投資家の投資姿勢・企業の資金調達動向といった内的要因も株価形成に大きな役割を果たしている。個々の銘柄に注目した場合、当該企業が置かれた個別の内的・外的要因が価格形成に作用する率は高いと予想する。しかし、複数の株価から算出される TOPIX や DJIA 等の株価指標

では、これら個別要因は相殺される。そこで本研究では、個別の銘柄に着目するのではなく、マクロ的な経済動向を示す指標としての TOPIX および DJIA の変動に着目した。

株式市場が開いている時間帯では不定期ながらも継続的に株券の売買行為が行われるため、株価は常に変動する可能性を有する。当然、複数の株価から算出される TOPIX や DJIA も常に変動するはずである。株価変動を時系列離散データとして捉える場合、日足や週足と称される概念が一般に用いられる。日足は、1 日の取引において初めて付いた価格である始値・最高値を意味する高値・最低値を表す安値・取引が終了した時点の価格である終値の 4 値から成る。週足も同じ 4 値で表現されるが、時間間隔が 1 日ではなく週単位となっている。そこで本研究では、1997 年 4 月 1 日から 2007 年 3 月 31 日までの 10 年間に渡る変動を対象に、日足を構成する 4 値それぞれを離散型変数と捉え、フラクタル次元の推定を行うことにした。

しかしここで問題となるのは、変動チャートを形成する際の時間軸設定方法である。縦軸に各指標の値、横軸に時間軸を取った場合、市場が開いていない日（休場日）を横軸にカウントする／しないによって変動チャートの形状は異なる。休場日であっても世界経済は常に変動しているため、先に述べた株価変動要因を取り巻く環境も変化しているはずである。そう考えるならば、休場日を横軸内に含めた変動チャートをフラクタル次元推定の対象とすべきである。一方で、東京証券市場や NY 証券市場の休場時間帯は TOPIX や DJIA の算出自体が行われないため、時間軸としてカウントする必要はない、という考えも成立する。そこで、休場日を横軸に含めた場合と含めない場合の両方について、フラクタル次元の推定を行った。

図 1 および図 2 は、休場日を横軸に含めたケースにおける TOPIX および DJIA の 1997 年 4 月から 2007 年 3 月までの、日足・始値の変動チャートである。なお、図 1 および図 2 に記された直線は、最小二乗法に基づいて時系列データより求めた回帰直線を意味している。

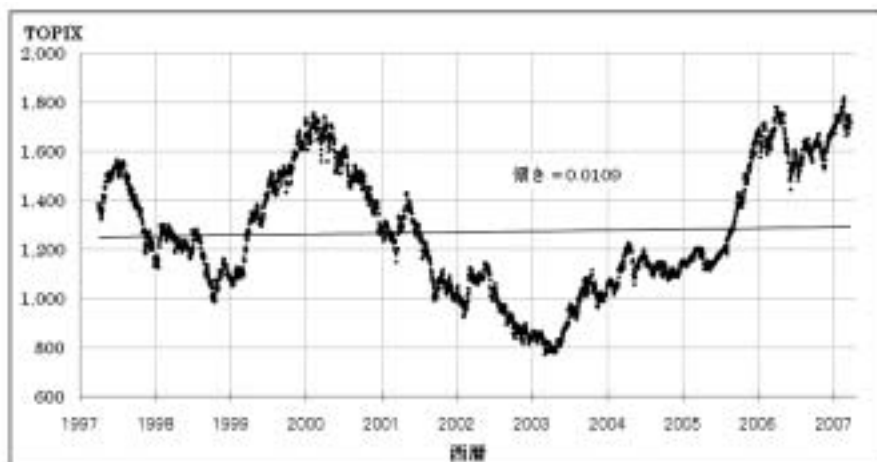


図 1 TOPIX 1997 年 4 月から 2007 年 3 月までの変動チャート (日足・始値)

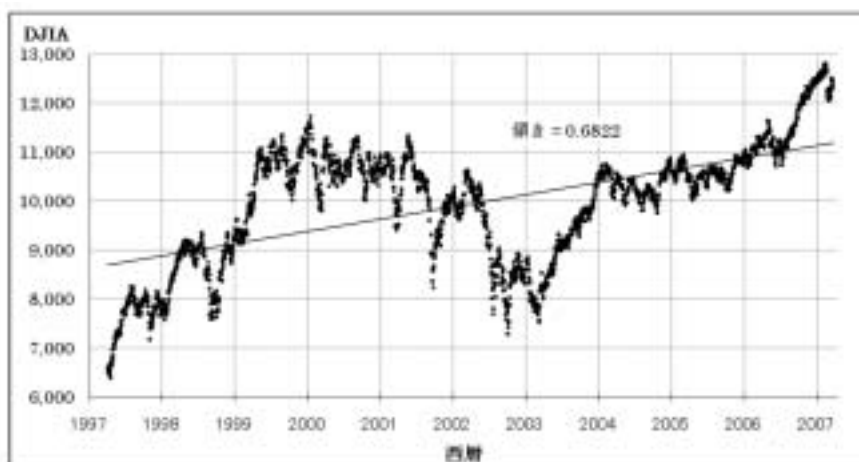


図 2 DJIA 1997 年 4 月から 2007 年 3 月までの変動チャート (日足・始値)

図 3 は、TOPIX の日足・始値を対象としたケースにおいて、 k の値を 2 から 100 まで変化させた際の $\log k$ の値を横軸に、 $\log L_{BK}(k)$ の値を縦軸に取ったグラフである。なお、Day-1 は時間軸に休場日を含めたチャートから算出した値であり、Day-2 は休場日を除いた開場日のみの値である。

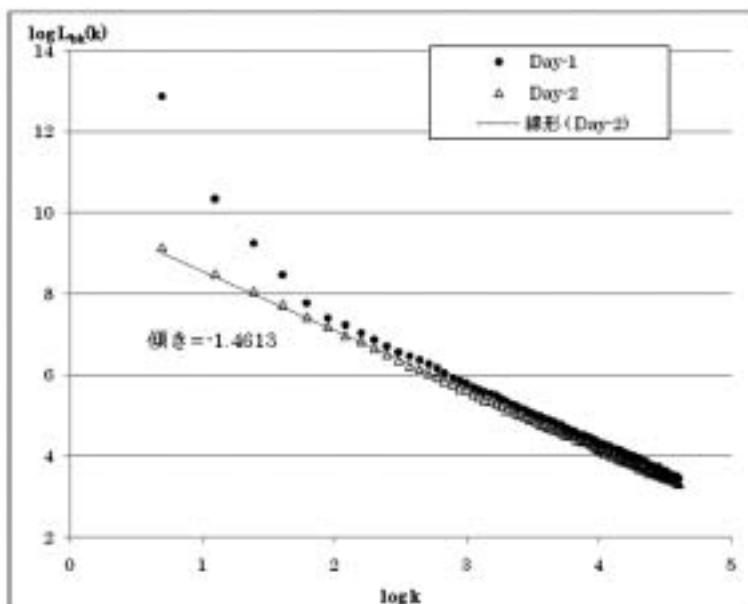


図 3 BK法を用いた際の $\log L_{BK}(k)$ と $\log k$ の関係 (TOPIX・日足・始値)

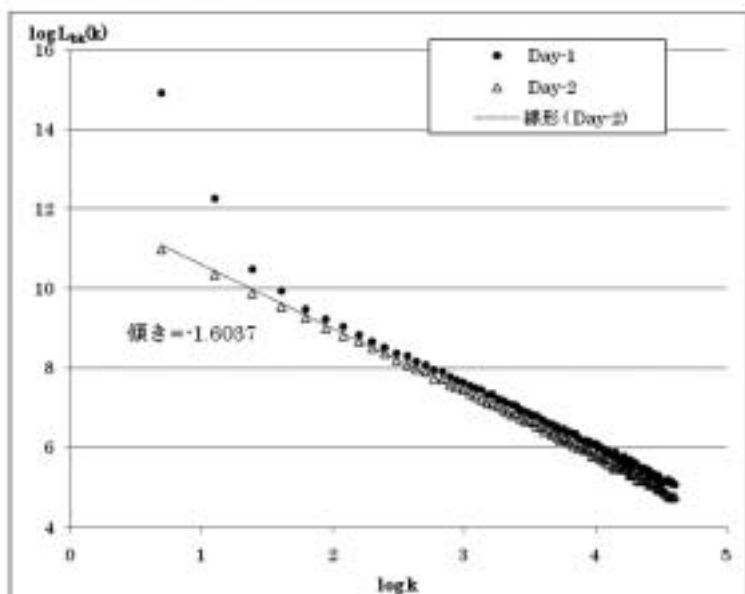


図 4 BK法を用いた際の $\log L_{BK}(k)$ と $\log k$ の関係 (DAX・日足・始値)

対象となった変動チャートがフラクタル構造を有するためには、式3および式4より、 k を変動させた際の $\log L_{BK}(k)$ と $\log k$ の関係が線形でなければならない。その上で、線形の傾きからフラクタル次元 D_{BK} を推定する。以上を踏まえて図3を検証すると、時間軸に休場日を含めた Day-1 のグラフは線形を示しておらず、フラクタル構造を有しないと判断できる。それに対し、休場日を含めない Day-2 の場合は直線を形成している。しかし、Day-1 の場合であっても k が $6(\log 6 \cong 1.8)$ 以上に限定すれば線形性が認められ、Day-2 のそれとほぼ平行である。つまり、休場日を含めた場合であっても $k \geq 6$ であればフラクタル構造が認められる。これは、DJIA を対象とした図4においても同様である。

その原因として、株式市場休場日が周期的に設けられている点および休場日数の多さが考えられる。東京市場・NY市場ともに週末の二日間は休場日であり、それ以外にも複数の休場日が設定されている。本研究の対象期間である1997年4月1日から2007年3月31日までは3652日で構成されるが、東京市場の休場日数は1191（休場日率32.6%）、NY市場では1136（同31.1%）であり、Day-1では時間軸のうち3割以上で値が示されない。その為、 k が6未満ではフラクタル構造を示さないと考えられる。しかし、Day-1においては $6 \leq k \leq 100$ の範囲で、Day-2においては $2 \leq k \leq 100$ の範囲であれば、推定されるフラクタル次元はほぼ同値（図3および図4に現れた線形の傾きがほぼ同じ）であり、これは市場の別に影響されない。

以上の結果より、市場休場時間帯に発生した様々な社会的事象は変動チャートのフラクタル性に対しほとんど影響を与えず、よって株式指標の変動に現れるフラクタル性を検証する際には時間軸に休場日を配さなくてもよい、と結論付ける。従って今後は、休場日を除外した開場日のみの時間軸を用いて作成した変動チャートを対象に、議論を進める。

次に、日足を構成する各系列の違いによって、フラクタル性の現れ方が変化するか否かを検証する。東京市場・NY市場いずれにおいても、日足を構成する4値各々を対象に k を変化させた場合、 $\log L_{BK}(k)$ と $\log k$ の関係はいずれも線

表 1 TOPIX と DJIA における、日足 4 系列各々の推定フラクタル次元

	フラクタル次元 D_{BK}	
	TOPIX	DJIA
始値	1.4613	1.6037
高値	1.4523	1.5972
安値	1.4740	1.6114
終値	1.4662	1.6081
平均	1.4634	1.6026

形を示した。よって、最小二乗法に基づく回帰直線を各系列毎に求め、その傾きからフラクタル次元を推定することは可能だと判断した。表 1 は、始値・高値・安値・終値の各系列における市場別フラクタル次元の推定値を示しているが、市場別に見ると 4 系列における D_{BK} はほぼ同値である。従って今後は、対象を始値に絞って議論を進める。

4. フラクタル構造を形成する要因

3. に示した結果より、Mandelbrot が発見した通り、TOPIX や DJIA の変動チャートはフラクタル構造を有することが確認できた。また、市場において売買される様々な金融商品価格から算出される各種指標の多くにも、同様にフラクタル構造が確認されている。次は原因の究明であるが、本質的な解明を目指すならば「その時点における利用可能なあらゆる情報を反映して市場は形成されている」という効率的市場仮説 (Efficient Market Hypothesis) の信憑性を論議の対象にすべきである^[7]。しかし本研究では、フラクタル構造の形成に直接作用すると思われる要因にのみ焦点を絞り、議論を進める。

市場において売買される金融商品の時間 t における価格を $x(t)$ とした時、式 5 に示す確率微分方程式を用い、時間 t と時間 $t+dt$ の差分 $dx(t)$ を線形的に表現する手法が良く用いられる。^{[8] [9] [10]}

$$dx(t) = b(t)dt + s(t)dw(t) \quad (\text{式5})$$

ただし,

$$dx(t) \equiv x(t+dt) - x(t)$$

$$dw(t) \equiv w(t+dt) - w(t)$$

$b(t)$: ドリフト項 (トレンド)

$s(t)$: 標準偏差項 (ボラティリティ)

$w(t)$: 幾何ブラウン運動 (ウィーナー過程)

そこで, TOPIX と DJIA の日足・始値を対象として, 式5の成立状況を検証する。なぜなら, 実際の変動パターンにおいて式5が成立するのならば, 確率過程の一種であるブラウン運動 $w(t)$ が変動チャート上に現れるフラクタル構造の要因であると考えられるからである。なお $w(t)$ はブラウン運動と仮定しているため, $w(t+dt) - w(t)$ で表される $dw(t)$ はそのマルコフ性に基づき $w(t)$ と独立なブラウン運動となる。^{[11][12]} そこで本論文では, $dw(t)$ を期待値が0で標準偏差が1であるブラウン運動と定める。

日足を対象としているため, 式5における dt は1(24時間)である。また既に述べた理由により, 休場日は除外し開場日のみを t とした。なお, 今後は時系列変動 $dx(t)$ を平均株価変動と称する。

図5および図6は, 横軸を開場日 t とし, 縦軸を TOPIX と DJIA の平均株価変動値とした時の散布図であるが, 図3および図4の変動チャートと区分する目的で, 増減チャートと呼ぶことにする。同時に, 最小二乗法を用いて散布図の回帰直線を求め, これをドリフト項 $b(t)$ と仮定する。従って, TOPIX では $b(t) = 0.0005t - 0.5233 (1 \leq t \leq 2460)$, DJIA では $b(t) = -0.0009t + 3.3640 (1 \leq t \leq 2514)$ と仮定する。また, 標準偏差項 $s(t)$ は時間 t による変動を考慮せず, 本研究の対象期間10年に渡って常に一定($=S$)と仮定した。以上の仮定を導入することにより, 式5は以下の式5'と書き改めることが可能となる。

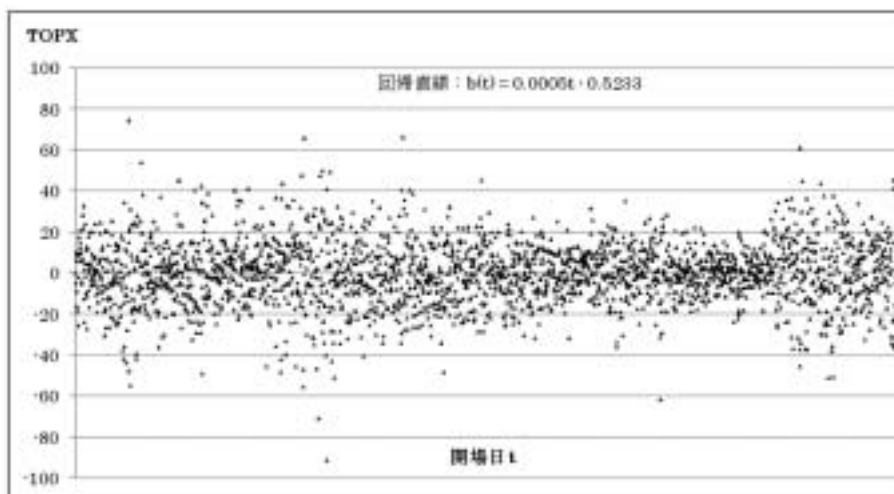


図 5 TOPIX (日記・始値) の平均株価変動 (増減チャート)

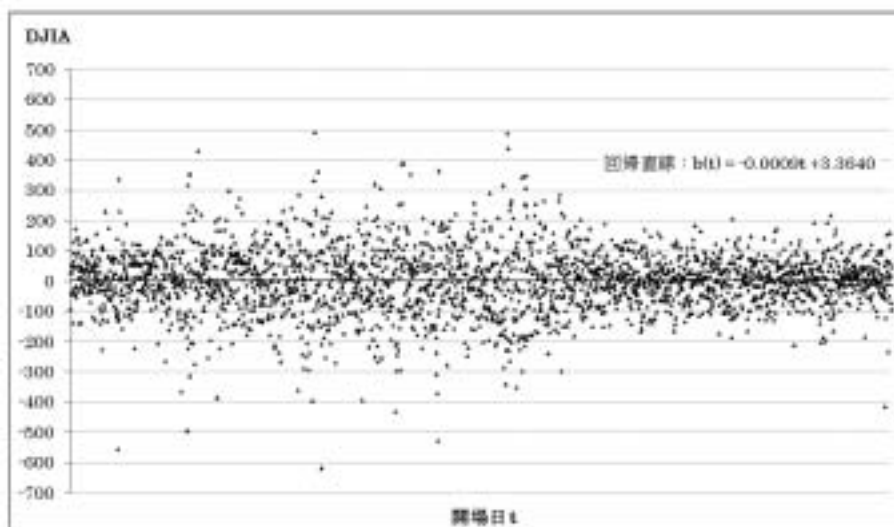


図 6 DJIA (日記・始値) の平均株価変動 (増減チャート)

$$dx(t) = b(t) + Sdw(t) \quad (\text{式 } 5')$$

ただし,

$$b(t) = \alpha(t) + \beta$$

S, α, β は定数

$dw(t)$ は $N(0, 1t)$ の正規分布に従う

式 5' が成立すると仮定すれば $Sdw(t)$ は $dx(t) - b(t)$ より算出可能となるため、今後は $Sdw(t)$ を日振動と称する。その上で、TOPIX と DJIA における日振動の期待値と標準偏差を算出したのが表 2 である。なお、TOPIX と DJIA 双方の個別状況を除外し両者を比較可能とする目的で、1997 年 4 月 1 日の TOPIX と DJIA それぞれの値を 100 とした場合の時系列相対値変動も同時に作成した。相対値を対象にこれまでと同様の計算を行っているため、実測値以外に相対値の場合についても表 2 に記している。

ドリフト項 $b(t)$ の仮定方法より導出される当然の帰着ではあるが、日振動の期待値は $1.71e^{-17}$ (TOPIX : 相対値) と $1.40e^{-17}$ (DJIA : 相対値) であったため、今後はいずれも 0 とみなす。また、 $dw(t)$ の標準偏差は 1 と定めているため、定数 S は日振動の標準偏差に等しくなる。以上を踏まえ、 $Sdw(t)$ のブラウン運動性を検証する。

表 2 TOPIX と DJIA の日振動における各変数の値

指数	分類	ドリフト項 $b(t)$	日振動の標準偏差 = S
TOPIX	実測値	$0.0005t - 0.5233$	15.3360
	相対値	$0.00004t - 0.0382$	1.1200
DJIA	実測値	$(-0.0009)t + 3.3640$	103.6234
	相対値	$(-0.00001)t + 0.0509$	1.5674

ブラウン運動は次の様に定義される。

【定義】 $B(t)$ が次の条件を満たす時, $B(t)$ は標準偏差 σ の 1 次元ブラウン運動である。

- (1) $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ であれば, $B(t_1) - B(t_0), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ は独立(独立増分)
- (2) $B_t - B_s$ の分布は $t - s$ にのみ依存 (定常増分)
- (3) $B(t)$ は正規分布 $N(\mu, \sigma^2 t)$ に従う

$$\text{ただし, } N(\mu, \sigma^2 t) \text{ の密度関数 } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- (4) $t \rightarrow B_t$ は連続である

図 7 と図 8 における棒グラフは, TOPIX と DJIA の日足・始値 (相対値) の日振動を対象とした場合における発生回数 (相対度数) を表わしている。一方の点線は $\mu = 0, \sigma$ を表 2 における S (相対値) とした際の確率密度関数 $f(x)$ を表わしている。図 7 および図 8 を見る限り, TOPIX と DJIA のいずれにおいても日

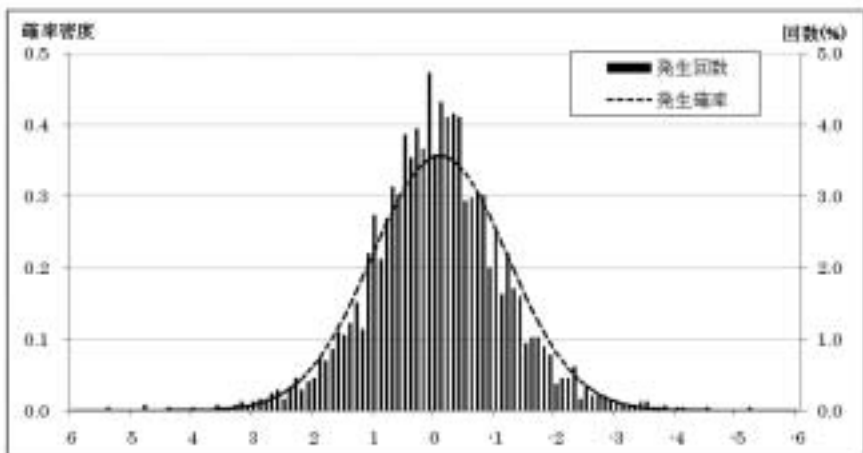


図 7 TOPIX (相対値) における発生回数および予想される確率密度関数

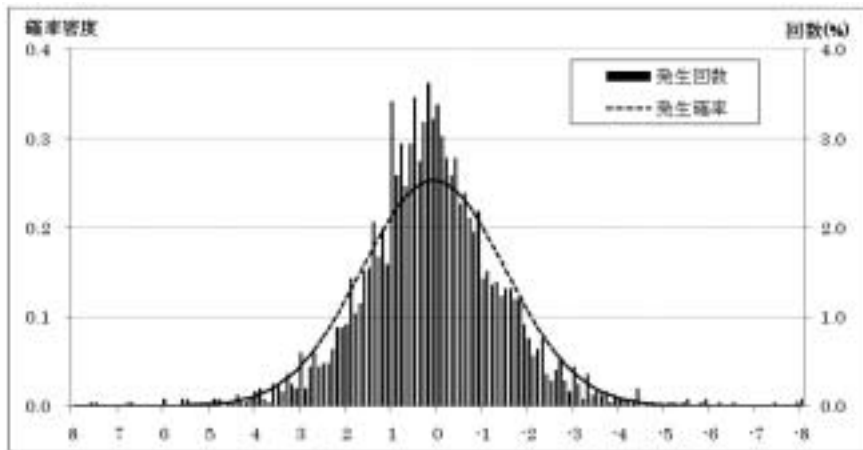


図 8 DJIA (相対値) における発生回数および予想される確率密度関数

振動は $N(\mu, \sigma^2)$ に概ね近似しているため、定義 (3) を満たしていると考えられるが、そのマルコフ性までは判断できない。

以上より、式 5' が成立すると仮定した場合、変動チャートが有するフラクタル構造は変動の原資である日振動によりもたらされていると考えられる。そこで次章では、日振動が有するフラクタル性について議論する。

5. 日振動が示すフラクタル性とブラウン運動

式 5' においては、ドリフト項 $b(t)$ は時間 t に対して線形であると仮定しているため、 $Sdw(t)$ によって示される日振動が平均株価変動 $dx(t)$ の状態を決定する。そこで横軸に時間 t (開場日のみ)、縦軸に日振動 $Sdw(t)$ を取ったチャートのフラクタル性についても、式 6 および式 7 に示す BK 法を用いて検証する。

$$k\alpha L2_{BK}(k)^{-D2_{BK}} \quad (\text{式 6})$$

$$D2_{BK} = \frac{\log L2_{BK}(k)}{\log k} \quad (\text{式 7})$$

ただし

$$\text{集合 } F_2 = \{Sdw(t) | 1 \leq t \leq n-1\}$$

$$Sdw(t) \equiv dx(t) - b(t)$$

$$i \text{ 番目のグループ } Sdw_i(k) = \{Sdw(t) | Sdw((i-1)k+1) \leq t \leq Sdw(i \cdot k)\}$$

$$L2_{BK}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{[(n-1)/k]} |\overline{Sdw_{i+1}(k)} - \overline{Sdw_i(k)}|$$

TOPIX と DJIA の双方について、 $2 \leq k \leq 100$ の範囲で k を変化させた際の $\log k$ を横軸に、 $\log L2_{BK}(k)$ を縦軸に取ったグラフが図 9 である。TOPIX・DJIA のいずれにおいても直線状に分布しているため、増減チャートはフラクタル構造を有していると判断できる。また、直線の傾きよりフラクタル次元 は次の様に推定できる。

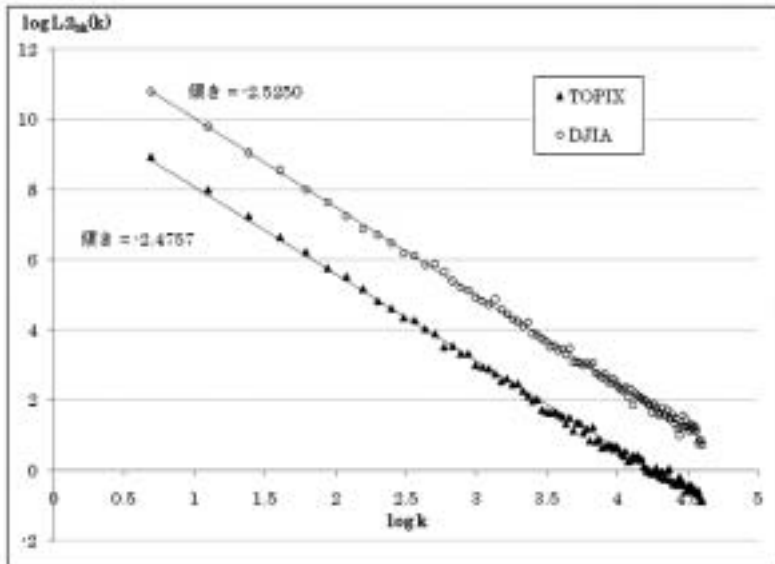


図 9 日振動におけるフラクタル構造

TOPIX における $D2_{BK} = 2.4757$

DJIA における $D2_{BK} = 2.5250$

TOPIX と DJIA の日足・始値を比較した場合、変動チャートより推定したフラクタル次元 D_{BK} の値は 1.4613 と 1.6037 であり、両者に 0.15 程度の差が認められる。しかし、日振動より推定した $D2_{BK}$ はそれぞれ 2.4757 と 2.5250 となり、両者に大きな差異は存在しない。そこで、日振動 $Sdw(t)$ がブラウン運動であったと仮定した場合において、標準偏差 S が日振動のフラクタル次元 $D2_{BK}$ に与える影響について考察する。

逆関数法を利用し、期待値が 0 であり標準偏差が 1 から 3 まで 0.5 刻みとなるブラウン運動 ($1 \leq t \leq 3000$) をそれぞれ 10 系列作成し、BK 法を用いてそのフラクタル次元を推定した。その結果、 $\log k$ と $\log L2_{BK}(k)$ の関係はいずれも線形であり、傾きおよび切片は表 3 に示す値となった。以上の実験より、マルコフ性を有し正規分布する離散型確率変数にもフラクタル性は存在し、そのフラクタル次元は 2.5 程度であることが判る。また、ブラウン運動を示す確率変数の分布状況を規定する標準偏差は、そのフラクタル次元にほとんど影響を与えないことが明らかとなった。

表 3 ブラウン運動の標準偏差とフラクタル性の関係

標準偏差	直線	データ系列										平均
		No.1	No.2	No.3	No.4	No.5	No.6	No.7	No.8	No.9	No.10	
1.0	傾き	-2.4681	-2.4603	-2.4751	-2.4488	-2.5271	-2.5398	-2.4759	-2.4273	-2.5626	-2.4636	-2.4849
	切片	8.0359	7.9994	8.0446	7.9670	8.2316	8.2928	8.0351	7.9831	8.3371	8.0194	8.0941
1.5	傾き	-2.5559	-2.4644	-2.5229	-2.4320	-2.4653	-2.4704	-2.5624	-2.5490	-2.5089	-2.5313	-2.5086
	切片	8.6876	8.4627	8.5894	8.3945	8.4846	8.4019	8.6337	8.6525	8.5520	8.5899	8.5549
2.0	傾き	-2.4882	-2.5025	-2.4792	-2.4693	-2.5030	-2.5096	-2.4906	-2.4808	-2.5226	-2.4359	-2.4909
	切片	8.7795	8.8151	8.7821	8.7285	8.8389	8.8154	8.8209	8.8619	8.8722	8.8116	8.8006
2.5	傾き	-2.4660	-2.5593	-2.4884	-2.4489	-2.4999	-2.5112	-2.4996	-2.4644	-2.4986	-2.5392	-2.4941
	切片	8.9483	9.1619	9.0027	8.9585	9.0053	9.0783	9.0406	8.9579	9.0493	9.1309	9.0334
3.0	傾き	-2.5068	-2.4397	-2.4889	-2.4791	-2.4834	-2.5020	-2.4994	-2.5228	-2.5324	-2.4655	-2.4900
	切片	9.2438	9.0600	9.1512	9.1735	9.1331	9.2516	9.2986	9.2937	9.2815	9.0699	9.1937

6. 日振動フラクタル次元と株価変動フラクタル次元

「分布状況を示す標準偏差が確率変数のフラクタル性に与える影響は無視できる」および「期待値が0であればそのフラクタル次元はおおよそ2.5と推定できる」というブラウン運動の特徴は、TOPIXとDJIAの日振動でも確認できるため、日振動がブラウン運動である可能性は高まった。しかし、マルコフ性を保証するブラウン運動の特徴（独立増分と定常増分）については、その存在を十分に証明できていない。

式5'が成立した場合、TOPIXとDJIAの比較において、 $D_{2_{BK}}$ における0.05の差（2.4757と2.5250）が D_{BK} では0.14（1.4613と1.6037）に広がった原因は、線形であると仮定した $b(t) = \alpha(t) + \beta$ および標準偏差 S であると考えられる。

そこで、逆関数法を用いて作成した互いに独立なブラウン運動100系列を用い、式5'が成立すると仮定した場合における株価指標変動をシミュレートした集合 $F_{TOPIX} = \{x_{TOPIX}(t) \mid 1 \leq t \leq 3000\}$ および $F_{DJIA}(1) = \{x_{DJIA}(t) \mid 1 \leq t \leq 3000\}$ をそれぞれ100系列作成した。集合の作成に際しては $X_{TOPIX}(1) = X_{DJIA}(1) = 100$ とし、表2内の相対値と同一の $b(t)$ および S を用いた。こうして作成した各々100系列の時系列変数を用い、BK法によるフラクタル次元 D_{BK} の推定を行った。図10と図11は、 F_{TOPIX} と F_{DJIA} の中から任意に選出した5個の時系列変数列をチャート化したものである。

TOPIXとDJIAのいずれにおいても、全系列において $\log L_{2_{BK}}(k)$ と $\log k$ は線形となったため、フラクタル構造の存在が確認できた。表4は、 F_{TOPIX} および F_{DJIA} における推定フラクタル次元の最大値・最小値・平均値および標準偏差を表わしている。

TOPIXとDJIAの実測値から推定した D_{BK} は、マルコフ性を有するブラウン運動でシミュレートした際の推定フラクタル次元範囲内に収まっており、日振動がブラウン運動であるとの仮説と矛盾しない。特にTOPIXの場合、実測値はシミュレートした100系列の平均推定フラクタル次元と非常に似通っている。た



図 10 ブラウン運動を用いて TOPIX 変動をシミュレートした 100 系列の代表 5 系列



図 11 ブラウン運動を用いて DJIA 変動をシミュレートした 100 系列の代表 5 系列

表 4 シミュレーション結果から推定したフラクタル次元

指標			TOPIX	DJIA
シミュレーション	$b(t)$ $= \alpha t + \beta$	α	0.00004	-0.00001
		β	-0.0382	0.0509
	S		1.1200	1.5674
	フラクタル次元 (100 系列)	最大値	1.5797	1.6257
		最小値	1.3754	1.4003
		平均値	1.4783	1.4942
		標準偏差	0.0494	0.0489
実測	フラクタル次元 D_{BK}		1.4613	1.6081

だし、シミュレーションによって発生した様々なチャートにおけるフラクタル次元は、その平均値に対し正規分布とはなっていない。図 12 は F_{TOPIX} において、100 系列個々の推定フラクタル次元とその平均値の差分を横軸に、縦軸に発生回数を取ったヒストグラムである。

最後に、式 5'における係数 α , β , S が変動チャートのフラクタル次元に与える影響を確かめる目的で、以下のシミュレーションを行った。

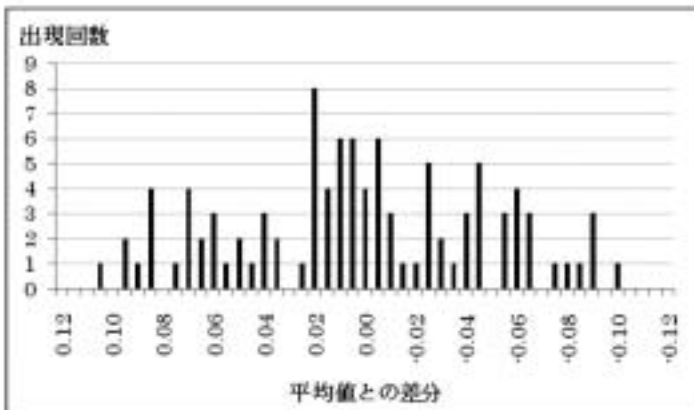


図 12 TOPIX シミュレート時のフラクタル次元分布状況

【シミュレーション方法】

逆関数法を用いて相互に独立したブラウン運動 100 系列を作成し、以下の通り定めた各係数とそれを用いて独立した時系列変数 100 系列を式 5' に従い作成する。BK 法を用いて各時系列変動のフラクタル次元を推定した後、係数の組み合わせ（各 100 系列）毎に平均フラクタル次元を算出する。

$$x(1) = 100$$

$$1 \leq t \leq 3000$$

$$-0.00010 \leq \alpha \leq 0.00010 \text{ (0.00001 刻み)}$$

$$-0.10 \leq \beta \leq 0.10 \text{ (0.01 刻み)}$$

標準偏差 S を 1.0, 1.5, 2.0 に設定し、それぞれで実験を行った。図 13 から図 15 はその結果をグラフ化したものである。同時に、 S の変化に対する平均フラクタル次元の変化を明らかにする目的で、各実験における全平均フラクタル次元を対象に最大値、最小値、平均値および標準偏差を記したものが表 5 である。

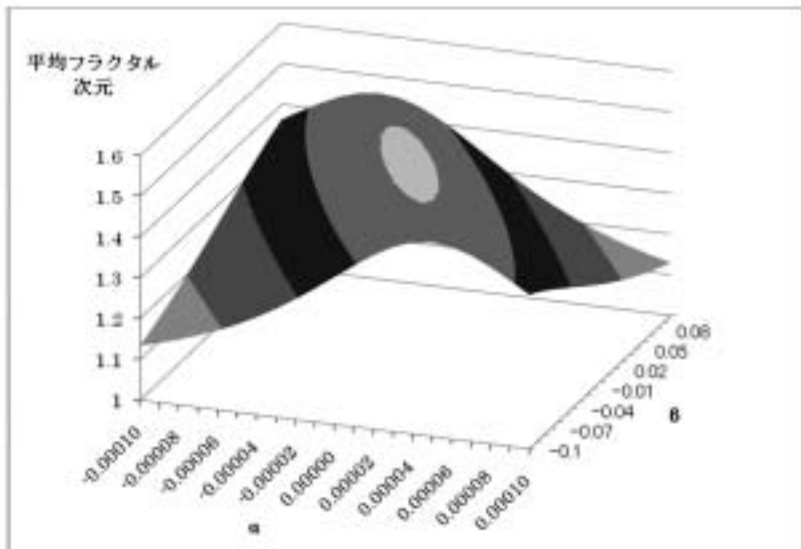


図 13 標準偏差 $S = 1.0$ における α と β およびフラクタル次元の関係

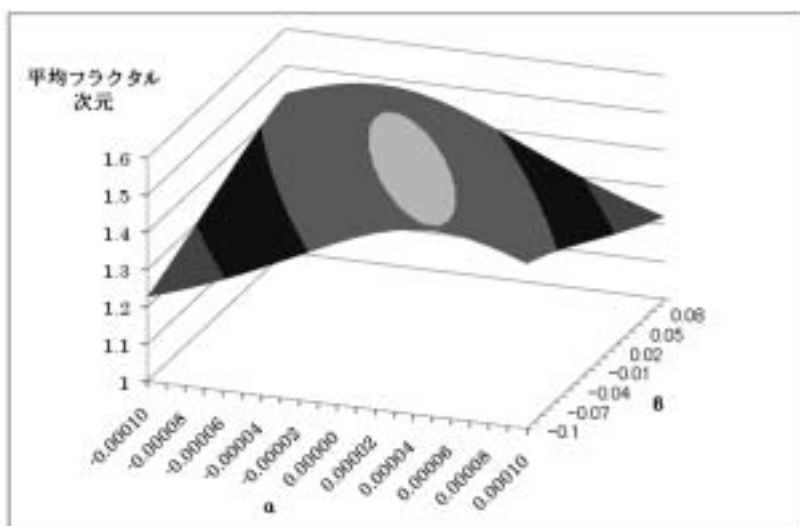


図 14 標準偏差 $s = 1.5$ における α と β およびフラクタル次元の関係

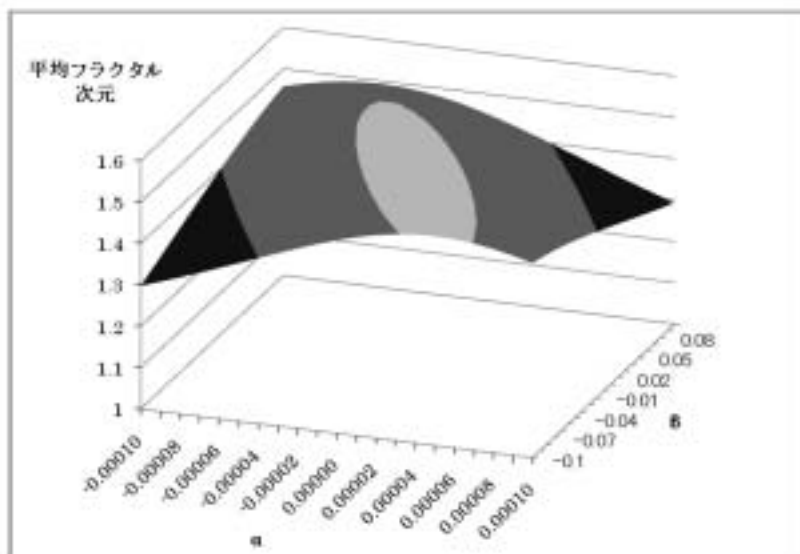


図 15 標準偏差 $s = 2.0$ における α と β およびフラクタル次元の関係

表 5 標準偏差 S の変化に伴う平均フラクタル次元の変化

平均フラクタル次元	標準偏差 S		
	1.0	1.5	2.0
最大値	1.5120	1.5122	1.5122
最小値	1.1295	1.2214	1.2932
平均値	1.3587	1.4184	1.4502
標準偏差	0.1050	0.0749	0.0536

図 13 から図 15 のいずれにおいてもグラフは鞍型を形成しており、平均フラクタル次元の最大値は S の増加に関わらずほぼ一定である。その反面、S の増加に合わせて鞍型下部が全体的に押し上げられるため、平均フラクタル次元の平均値上昇および同標準偏差の減少が認められる。また S の増加は鞍型の頂点部面積を増大させているが、頂点の位置 (α, β) は $(0.00001, -0.02)$ に留まっている。また、推定フラクタル次元が 1.6 を超えたケースは非常に稀 (S = 1.0 で 0.52%, S = 1.5 で 0.86%, S = 2.0 で 1.29%) ではあるが存在しており、DJIA が示した値だけでは日振動のマルコフ性を否定できない。図 16 は、全 44100 回の試行 (α 21 段階 \times β 21 段階 \times ブラウン運動 100 系列) を対象に、個々の推定フ

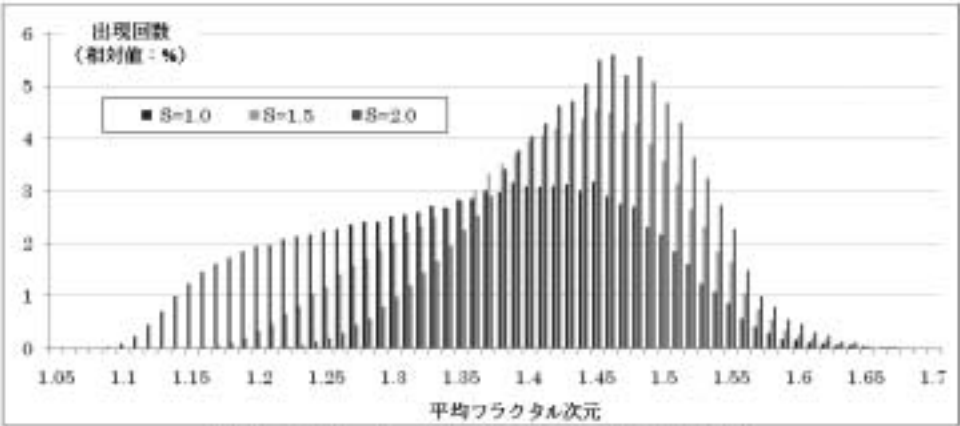


図 16 シミュレーションにおけるフラクタル次元の出現状況

ラクタル次元出現回数（相対値）を表したヒストグラムである。このグラフからも、ブラウン運動における標準偏差 S の変化が時系列変動に与える影響が見て取れる。

いずれの実験結果も、TOPIX や DJIA の時系列変動を確率微分方程式により表現する際の障害とはなり得ず、各指標の日振動がマルコフ性を有することを否定しない。以上より本研究は、1997 年 4 月から 2007 年 3 月までを対象とした TOPIX および DJIA の時系列変動に対し、その変動を確率微分方程式により表現できると結論付ける。

7. 確率微分方程式の適用による新たなフラクタル次元推定法

これまでの研究によって、確率微分方程式により表記可能な時系列変動にはフラクタル構造が認められる事実が明らかとなった。そこで本研究では、確率微分方程式を応用したフラクタル次元推定法として、以下に示す Slope 法を提案する。

$$k\alpha L_{SL}(k)^{-D_{SL}} \quad (\text{式 } 8)$$

$$D_{SL} = -\frac{\log L_{SL}(k)}{\log k} \quad (\text{式 } 9)$$

ただし

$$\text{集合 } F = \{x(t) \mid 1 \leq t \leq n\}$$

$$i \text{ 番目のグループ } \tilde{x}_i\{x(t) \mid x((i-1)k+1) \leq t \leq x(i \cdot k)\}$$

$$\widehat{a_i(k)} = \frac{\sum_{j=1}^k j \cdot x((i-1)k+j) - \sum_{j=1}^k j \cdot \sum_{j=1}^k x((i-1)k+j)}{k \sum_{j=1}^k j^2 - (\sum_{j=1}^k j)^2}$$

$$L_{SL}(k) = \sum_{i=1}^{\lceil n-1/k \rceil - 1} |\widehat{a_i(k)}|$$

$\widehat{a_i(k)}$ は、 i 番目のグループに属する k 個の要素を基に、最小二乗法を用いて求

めた回帰直線の傾きを意味する。そこで傾き（絶対値）の総和 $L_{SL}(k)$ に着目し、 k の値を様々に変動させる場合における $L_{SL}(k)$ の変化からフラクタル性を明らかにする手法が Slope 法である。

BK 法の基礎をなす時系列平均変動 $L_{BK}(k)$ は、一定期間内における株価推移のトレンドに準じた概念であるため、Slope 法に通ずる考え方と言える。実際、式 2 は以下の様に展開可能である。

$$L_{BK}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{[n/k]} |\overline{x_{i+1}(k)} - \overline{x_i(k)}|$$

$$= \frac{|\overline{x_2(k)} - \overline{x_1(k)}|}{k} + \frac{|\overline{x_3(k)} - \overline{x_2(k)}|}{k} + \dots + \frac{|\overline{x_{[n/k]}(k)} - \overline{x_{[n/k]-1}(k)}|}{k} \quad (\text{式 10})$$

ただし、

$$\overline{x_i(k)} = \frac{x((i-1)k+1) + x((i-1)k+2) + \dots + x(i \cdot k)}{k}$$

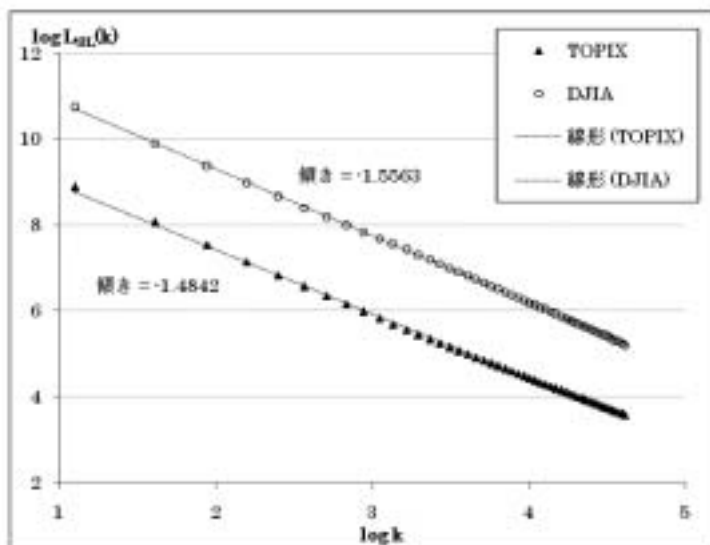


図 17 Slope 法を用いた際の $\log L_{SL}(k)$ と $\log k$ の関係 (日足・始値)

つまり、作成した $[n/k]$ 組のグループ個々で指標の平均（平均指標）を求め、隣接する 2 グループにおける平均指標の増減から単位時間当たりの増加量（絶対値）を算出し、その総和を $L_{BK}(k)$ としている。従って $(\overline{x_i(k)} - \overline{x_{i-1}(k)})/k$ は、隣り合う 2 区間を一つの区間とみなした際に、同区間内に属する全要素から最小二乗法を用いて算出した回帰直線の傾きに準ずる値になると予想できる。

図 17 は、時間軸を開場日のみとした場合における TOPIX と DJIA の時系列変動（日足・始値）を基に、 $2 \leq k \leq 100$ の範囲で $L_{SL}(k)$ を求めた結果を表わしている。 $\log k$ と $\log L_{SL}(k)$ の関係は線形を示しており、フラクタル次元 D_{SL} はそれぞれ 1.4842 と 1.5563 であると推定できる。この値は、BK 法を用いた際の D_{BK} に近似している。

7. まとめ

本論文では、時系列株価指標変動が有するフラクタル構造に注目し、構造の解明およびフラクタル性をもたらす原因について考察した。指標変動が確率微分方程式により表現可能であると仮定した場合、指標変動が示すフラクタル性は確率微分方程式が内包するブラウン運動に起因するはずである。そこで、ブラウン運動の確率密度関数を決定する標準偏差を変化させた際のフラクタル次元変化を調査した結果、ブラウン運動それ自体が有するフラクタル次元は確率密度関数にほとんど依存しない事実が明らかとなった。その上で、確率微分方程式によって導出される時系列確率変数のフラクタル次元は、係数であるトレンドやボラティリティに依存しているだけでなく、その発現模様は各係数の値によって特徴付けられる事実を実験により確かめた。

1997 年 4 月から 2007 年 3 月までの 10 年間における TOPIX および DJIA の変動を確率微分方程式により記述した場合、生成される日振動はブラウン運動が示す確率分布に近似している。同時に、日振動がブラウン運動であることを否定する要素は発見できなかったため、調査に用いた 10 年間に限定すれば確率微分方程式による表記は妥当であると結論付ける。

この事実は、独立増分かつ定常増分であるマルコフ過程に基づいて株価指標が変動している可能性を示唆しているが、同時に、過去の変動パターンは無数に存在しうる確率的選択肢の一つに過ぎない可能性も示している。筆者らは、この事実が線形手法を用いた未来予測の限界であると考え、「過去」は、確率論的に存在し得る無数の「未来」の一つに過ぎないという事実は、存在し得る「未来」の一つを過去の一時点が恣意的に選択した可能性を否定しない。つまり、現在の様々な経済状況が未来の選択可能性を左右していると仮定した場合、線形手法にのみ依存する限り、現在を生きる我々はその事実を感知出来ない。未来から現在を観察して初めて、確率的選択性を認識できることになる。

線形手法が持つ有用性を生かしながら、ニューラルネットワークや遺伝的アルゴリズムといった自己学習型の非線形手法^{[13] [14] [15]}を組み合わせることによって、適切かつ確実性のある経済指標未来予測システムを開発するのが、今後の課題である。

参考文献

- [1] B.B. Mandelbrot, 広中平祐 監訳, フラクタル幾何学, 日経サイエンス社, 1984
- [2] Kenneth Falconer, 服部久美子他 訳, フラクタル幾何学, 共立出版, 2006
- [3] 高安秀樹, フラクタル, 朝倉出版, 1986 年
- [4] 高橋朋一・長坂健二, 時系列データのフラクタル次元の推定法, 計測自動制御学会論文集, Vol.33, No.9, 987-980, 1997
- [5] L.F. Burlaga and L.W. Klein, Fractal structure of the interplanetary magnetic field, Journal of Geophysical Research, 91, 347-350, 1986
- [6] L.F. Burlaga and L.W. Klein, Large-scale fluctuations in the interplanetary medium, Journal of Geophysical Research, 92, 1261-1266, 1987
- [7] 田中航二, TOPIX (1990-1970) にみられる変動の非線形特性について, 大阪商業大学論集, 第 113 巻, 871-885, 1999
- [8] 山本 拓, 経済の時系列分析, 創文社, 1998
- [9] B. Oksendal, 谷口説男 訳, 確率微分方程式, シュプリンガー・ジャパン, 1999
- [10] 北坂真一, 統計学から始める計量経済学, 有斐閣, 2005
- [11] R. Durrett, 今野紀雄他 訳, 確率過程の基礎, シュプリンガー・ジャパン, 2005
- [12] 遠藤 靖, 確率モデルの基礎 金融工学を視野に入れた確率論的考え方, 東京電機大学, 2002

- [13] 電気学会, GA・ニューロを用いた学習法とその応用調査専門委員会 編, 学習とそのアルゴリズム, 森北出版, 2002
- [14] 長尾智晴, 最適化アルゴリズム, 昭晃堂, 2000
- [15] 時永祥三 編著, 複雑系とシステムリスク分析, 九州大学出版会, 2006